FUNCIÓN Y CONCEPTO

(Conferencia dada en la sesión del 9-1-1891 de la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena.)

Hace ya bastante tiempo [1] tuve el honor de dar una conferencia en esta Sociedad sobre el modo de simbolización que he denominado ideografía. Hoy quisiera iluminar esta cuestión desde otro ángulo y comunicar algunos complementos y concepciones nuevas, cuya necesidad se me ha hecho evidente desde entonces. Con ello no pretendo dar una exposición completa de mi ideografía, sino sólo hacer públicas algunas ideas básicas.

Parto de lo que en matemáticas se llama función. Esta palabra no tuvo al principio un significado tan amplio como el que ha obtenido más tarde. Será bueno empezar por dirigir nuestra atención hacia los modos de uso originarios y sólo luego considerar sus extensiones posteriores. De momento voy a hablar únicamente de funciones de un solo argumento. Una expresión científica aparece en su significado más característico allí donde se precisa de este significado suyo para expresar una ley general. En el caso de la función, esto ocurrió con el descubrimiento del análisis

1. El 10 de enero de 1871 y el 27 de enero de 1882.

superior. En éste se trató ante todo de establecer leyes que valiesen para las funciones en general. Hay que retroceder, pues, a la época del descubrimiento del análisis superior, si se quiere saber qué fue lo primero que se entendió en matemáticas por la palabra "función". A esta pregunta se recibe ciertamente la respuesta: "por función de x se entendió una expresión de cálculo que contenga x, una fórmula que incluya la letra x". Según esto, por ejemplo, la expresión

$$2 \cdot x^3 + x$$

sería una función de x, y

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

sería una función de 2. Esta respuesta no puede satisfacernos, puesto que en ella no se distinguen forma y contenido, signo y designado, un error con el que, naturalmente, se encuentra uno ahora muy frecuentemente en escritos matemáticos, incluso de autores de renombre. En otros lugares [2] he señalado ya los fallos de las teorías formalistas corrientes de la aritmética. En ellas se habla de signos que no tienen ningún contenido, ni lo deben tener, pero luego se les atribuye, no obstante, propiedades que sólo pueden corresponder razonablemente a un contenido del signo. Lo mismo ocurre también aquí: una mera expresión, la forma de un contenido, no puede ser lo esencial de la cosa, sino que sólo lo puede ser el contenido mismo. Ahora bien,

2. *Die Grundlagen der Arithmetik* ("Los fundamentos de la Aritmética"), Breslau 1884, pp. 92 y ss., e informes en las sesiones de la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena, año 1885, reunión del 17 de julio. [N.° 7 y 8 del índice. Edit. alemán].

¿cuál es el contenido, la referencia de "$2 \cdot 2^3 + 2$"? El mismo que el de "18" o de "$3 \cdot 6$". En la igualdad $2 \cdot 2^3 + 2 = 18$ se expresa que la referencia de la cadena de signos que está a la derecha es la misma que la de la izquierda. Debo salir aquí al paso de la opinión según la cual $2 + 5$ y $3 + 4$, por ejemplo, son ciertamente iguales, pero no lo mismo. La raíz de esta opinión es nuevamente la confusión entre forma y contenido, entre signo y designado. Es lo mismo que si se quisiera considerar la violeta olorosa como diferente de la *Viola odorata*, porque sus nombres suenan distintos. La diferencia de designación por sí sola no basta para fundamentar una diferencia de designados. En nuestro caso, la cuestión es menos transparente tan sólo por el hecho de que la referencia del signo numérico 7 no es sensiblemente perceptible. La tendencia actualmente muy difundida a no considerar como objeto más que lo que puede ser percibido con los sentidos induce erróneamente a tomar por números los signos numéricos mismos, a considerarlos los verdaderos objetos de estudio;[3] y entonces, naturalmente, 7 y $2 + 5$ serían distintos. Pero tal concepción no puede mantenerse, porque no podemos hablar en absoluto de cualesquiera propiedades aritméticas de los números, sin remitirnos a la referencia de los signos numéricos. La propiedad del 1, por ejemplo, de que, al multiplicarse por sí mismo, se da otra vez a sí mismo, sería una

3. Véanse los ensayos: *Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet* ("Contar y medir considerados epistemológicamente"), de H. y, HELMHOLTZ, y *Über den Zahlbegriff* ("Sobre el concepto de número"), de LEOPOLD KRONECKER *(Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet.)* ("Ensayos filosóficos. Dedicados a Eduard Zeller en el cincuentenario de su doctorado"). Leipzig, 1887.

pura fantasía; ninguna investigación microscópica o química, por exhaustiva que fuese, podría descubrir nunca esta propiedad en la inocente figura que llamamos el signo numérico uno. Quizá se habla de una definición; pero ninguna definición es creadora, en el sentido de que pueda conferir a una cosa propiedades que no tenga ya, fuera de la propiedad de expresar y designar aquello para lo que la definición la introduce como signo.[4] Por el contrario, las figuras que llamamos signos numéricos tienen propiedades físicas y químicas que dependen del medio de escritura. Puede imaginarse que alguna vez se introduzcan signos totalmente nuevos, lo mismo que los signos árabes desplazaron a los romanos, por ejemplo. Nadie considerará en serio que así se obtendrían números totalmente nuevos, objetos de la aritmética totalmente nuevos, con propiedades hasta entonces inexploradas. Así, pues, si hay que distinguir los signos numéricos de aquello a lo que se refieren, también habrá que reconocer la misma referencia a las expresiones "2", "$1 + 1$", "$3 - 1$", "$6 : 3$"; pues no podemos alcanzar a comprender en qué radicaría la diferencia. Quizá se diga: $1 + 1$ es una suma, pero $6 : 3$ es un cociente. ¿Pero qué es $6 : 3$? El número que multiplicado por 3 da 6. Se dice "el número", no "un número"; con el artículo determinado se señala que sólo hay un único número. Ahora bien, resulta que

$$(1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) = 6,$$

4. De lo que se trata siempre en este caso es de unir un sentido o una referencia a un signo. Si faltan totalmente sentido y referencia, no puede hablarse propiamente ni de un signo ni de una definición.

y por lo tanto $(1+1)$ es precisamente el número que se designó por $(6:3)$. Las diferentes expresiones corresponden a diversas consideraciones y aspectos, pero, no obstante, siempre a la misma cosa. En caso contrario, la ecuación $x^2=4$, no sólo tendría las dos raíces 2 y -2, sino también $(1+1)$ y muchas otras, que serían distintas unas de otras, aunque en cierto aspecto serían análogas. Al admitirse solamente dos raíces reales se desecha la idea de que el signo de igualdad no significa una coincidencia completa, sino únicamente una concordancia parcial. Esto asentado, vemos entonces que las expresiones

$$\text{“}2\cdot 1^3+1\text{”},$$
$$\text{“}2\cdot 2^3+2\text{”, y}$$
$$\text{“}2\cdot 4^3+4\text{”}$$

se refieren a números, a saber, 3, 18 y 132. Si la función sólo fuera realmente la referencia de una expresión de cálculo, entonces sería justamente un número; y con ello no habríamos ganado nada nuevo para la aritmética. Ahora bien, ante la palabra “función”, uno suele pensar, naturalmente, en expresiones en las cuales se alude a un número sólo indeterminadamente por medio de la letra *x*, como por ejemplo,

$$\text{“}2\cdot x^3+x\text{”};$$

pero con ello no cambia nada; pues esta expresión, entonces, alude también sólo indeterminadamente a un número; y que lo escribamos a él o sólo “*x*” no entraña ninguna diferencia esencial. No obstante, precisamente gracias a la utilización en la escritura de la “*x*”, que alude indeterminadamente, podemos ser conducidos a

la concepción correcta. Se llama a *x* el argumento de la función y en

$$\text{“}2\cdot 1^3+1\text{”},$$
$$\text{“}2\cdot 4^3+4\text{”, y}$$
$$\text{“}2\cdot 5^3+5\text{”}$$

se reconoce una y otra vez la misma función, sólo que con distintos argumentos, a saber, 1, 4 y 5. De aquí puede inferirse que lo realmente esencial de la función radica en lo que tienen de común estas expresiones; es decir, pues, en lo que se halla en

$$\text{“}2\cdot x^3+x\text{”}$$

además de la “*x*”; lo cual podríamos escribir quizás así

$$\text{“}2\cdot(\ )^3+(\ )\text{”}.$$

Me interesa señalar que el argumento no forma parte de la función, sino que constituye, junto con la función, un todo completo; pues la función, por sí sola, debe denominarse incompleta, necesitada de complemento o no-saturada. Y ésta es la diferencia de principio que hay entre las funciones y los números. Y por esta naturaleza de la función se explica que, por una parte, reconozcamos la misma función en “$2\cdot 1^3+1$” y “$2\cdot 2^3+2$”, a pesar de que estas expresiones se refieran a números distintos, mientras que, por otra parte, en “$2\cdot 1^3+1$” y “$4-1$”, a pesar de su mismo valor numérico, no encontremos la misma función. También vemos ahora cuán fácilmente puede uno ser llevado erróneamente a ver lo esencial de la función justamente en la forma de la expresión. En la expresión reconocemos la función al imaginarla descompuesta; y una tal descomposición posible es sugerida por su forma.

Las dos partes en que se descompone la expresión de cálculo, el signo del argumento y la expresión de la función, son heterogéneas, dado que el argumento es un número, un todo completo en sí mismo, cosa que no es la función. Puede compararse esto a la división de una línea por un punto. Nos inclinamos entonces a atribuir el punto de división a ambos segmentos de la línea. Pero si quiere efectuarse la división de manera pura, o sea, de modo que no se cuente nada dos veces, ni quede nada fuera, entonces habrá que atribuir el punto de división únicamente a uno de los segmentos. Este último quedará completamente cerrado en sí mismo, y puede compararse al argumento, mientras que al otro le falta algo. Pues el punto de división, al que podría llamarse su punto terminal, no le pertenece. Solamente al completarlo por medio de este punto terminal o de una línea con dos puntos terminales se obtiene un todo completo. En nuestro caso, cuando hablamos, por ejemplo, de "la función $2 \cdot x^3 + x$", no hay que considerar que x pertenece a la función, sino que esta letra sólo sirve para indicar el tipo de complementación que le falta, al hacer patentes los lugares en los que tiene que entrar el signo del argumento.

Ahora bien, llamamos a aquello, en lo que se convierte la función al ser completada por su argumento, el valor de la función para este argumento. Así, por ejemplo, 3 es el valor de la función $2 \cdot x^2 + x$ para el argumento 1, puesto que tenemos $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$.

Existen funciones, como, por ejemplo, $2 + x - x$ o $2 + 0 \cdot x$, cuyo valor es siempre el mismo sea cual sea

su argumento; tenemos $2 = 2 + x - x$ y $2 = 2 + 0 \cdot x$. Si se considerase el argumento incluido en la función, debería tomarse el número 2 como esta función. Pero esto es incorrecto. Aunque el valor de la función aquí siempre es 2, con todo, hay que distinguir 2 de la función en sí misma; pues la expresión de una función tiene que mostrar siempre uno o más lugares que están destinados a ser llenados por el signo del argumento.

El método de la geometría analítica nos ofrece un medio de hacernos intuitivos los valores de una función para diversos argumentos. Pues, al considerar el argumento como valor numérico de una abscisa y el valor correspondiente de la función como valor numérico de la ordenada de un punto, obtenemos un conjunto de puntos que, en los casos usuales, se nos presentan intuitivamente como una curva. A cada punto de la curva le corresponde un argumento con el correspondiente valor de la función.

Así, por ejemplo,

$$y = x^2 - 4x$$

da lugar a una parábola, aludiendo "y" al valor de la función y al valor numérico de la ordenada, al igual que "x" alude al argumento y al valor numérico de la abscisa. Si la comparamos ahora con la función

$$x(x - 4),$$

hallamos que en todos los casos tiene el mismo valor para el mismo argumento que la anterior. Tenemos, en general,

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

sea cual sea el número por el que se sustituya x. De ahí que la curva que obtenemos de

$$y = x^2 - 4x$$

sea la misma que la que resulta de

$$y = x(x - 4).$$

Esto lo expreso así: la función $x(x-4)$ tiene el mismo recorrido que la función $x^2 - 4x$.

Cuando escribimos

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

no igualamos una función a la otra, sino solamente los valores de las funciones entre sí. Y si admitimos que esta ecuación debe ser válida, cualquiera que sea el argumento que sustituya x, habremos expresado de este modo la generalización de una ecuación. Pero en vez de ello también podemos decir "el recorrido de la función $x(x-4)$ es igual al de la función $x^2 - 4x$" y tendremos así una igualdad entre recorridos. Que es posible concebir la generalización de una igualdad entre valores de función como una igualdad, a saber, como una igualdad entre recorridos, me parece que no hay que demostrarlo, sino que tiene que ser considerado como un principio lógico.[5]

Podemos introducir también una notación abreviada para el recorrido de una función. A este fin, sustituyo el signo del argumento en la expresión de la función por una letra vocal griega, lo pongo todo entre paréntesis y antepongo a esto la misma letra griega con un espíritu suave. Según esto,

$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon)$$

por ejemplo, será el recorrido de la función $x^2 - 4x$ y

$$\grave{\alpha}(\alpha \cdot [\alpha - 4])$$

el recorrido de la función $x(x-4)$, de modo que en

$$\text{“}\grave{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon) = \grave{\alpha}\,(\alpha \cdot [\alpha - 4])\text{”}$$

tenemos la expresión de que el primer recorrido es el mismo que el segundo. Se han escogido letras griegas diferentes a propósito, para indicar que nada nos fuerza a tomar las mismas.

$$\text{“}x^2 - 4x = x(x - 4)\text{”}$$

expresa ciertamente el mismo sentido, si lo entendemos como antes, pero lo expresa de manera distinta. Representa este sentido en forma de generalización de una ecuación, mientras que la expresión que acabamos de introducir es sencillamente una ecuación cuyo miembro de la derecha tiene, lo mismo que el de la izquierda, una referencia completa en sí misma. En

$$\text{“}x^2 - 4x = x(x - 4)\text{”}$$

el miembro de la izquierda, tomado aislado, alude sólo indeterminadamente a un número, y lo mismo ocurre

5. En algunos usos del modo de expresión habitual en matemáticas, la palabra "función" corresponde ciertamente a lo que aquí he llamado recorrido de una función. Pero la función, en el sentido de la palabra utilizado aquí, es lógicamente anterior.

con el miembro de la derecha. Si tuviéramos meramente "$x^2 - 4x$", podríamos escribir en vez de ello también "$y^2 - 4y$", sin que cambiara el sentido; pues "y", lo mismo que "x", alude sólo indeterminadamente a un número. Pero si unimos ambos miembros en una ecuación, tenemos que escoger la misma letra para ambos lados y con ello expresamos algo que no contiene ni el miembro de la izquierda por sí solo, ni el de la derecha, ni el signo de igualdad, a saber, la generalización justamente; naturalmente, se trata de la generalización de una ecuación, pero, no obstante, es, ante todo, una generalización.

Así como se alude indeterminadamente a un número por medio de una letra, para expresar generalización, asimismo se siente la necesidad de aludir indeterminadamente a una función por medio de letras. Para ello, se suele hacer uso generalmente de las letras f y F, de tal manera que, en "$f(x)$" y "$F(x)$", x representa el argumento. En este caso, se pone de manifiesto la necesidad de complementación de la función por el hecho de que la letra f o F lleve consigo un paréntesis, cuyo espacio interior está destinado a recibir el signo del argumento. Según esto,

$$\text{“}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon)\text{”}$$

alude al recorrido de una función, que se deja indeterminada. Ahora bien, ¿cómo fue ampliada la referencia de la palabra función con el progreso de la ciencia? Aquí pueden distinguirse dos direcciones. En primer lugar, se amplió el círculo de las operaciones de cálculo que contribuyen a la creación de una función. A la adición, multiplicación, potenciación y sus inversas se añadieron los diversos tipos de paso al límite, aun-

que no siempre se tuviera una conciencia clara de lo que había de esencialmente nuevo en lo que así se introducía. Se siguió avanzando y se hizo preciso incluso buscar refugio en el lenguaje hablado, dado que el lenguaje simbólico del análisis dejaba de funcionar cuando se hablaba por ejemplo de una función, cuyo valor para argumento racional es 1, y para argumento irracional es 0.

En segundo lugar se amplió el círculo de lo que puede aparecer como argumento y valor de la función, al ser admitidos los números complejos. Con ello, hubo al mismo tiempo que determinar con más precisión el sentido de las expresiones "suma", "producto", etc.

Ahora proseguiré yo en ambas direcciones. Ante todo, a los signos $+$, $-$, etc., que sirven para la formación de una expresión funcional, añado signos como $=$, $<$, $>$, de modo que podré hablar, por ejemplo, de la función $x^2 = 1$, en la que, como antes, x representa el argumento. La primera cuestión que surge aquí es la de cuáles son los valores de la función para distintos argumentos. Si ordenadamente sustituimos x por -1, 0, 1, 2, obtenemos

$$(-1)^2 = 1,$$
$$0^2 = 1,$$
$$1^2 = 1,$$
$$2^2 = 1.$$

De estas ecuaciones, sólo la primera y la tercera son verdaderas. Así, pues, digo: "el valor de nuestra función es un valor veritativo" y distingo el valor veritativo de lo verdadero y el de lo falso. Para abreviar, a uno lo llamo lo verdadero, y al otro lo falso. Según esto, "$2^2 = 4$", por ejemplo, se refiere a lo verdadero, al igual que "2^2", por ejemplo, se refiere a 4. Y "$2^2 = 1$" se refiere a lo falso. Según esto,

$$“2^2 = 4”, “2 > 1”, “2^4 = 4^2”$$

se refieren a lo mismo, a saber, lo verdadero, de manera que

$$(2^2 = 4) = (2 > 1)$$

es una ecuación correcta.

Es natural aquí la objeción de que, no obstante, "$2^2 = 4$" y "$2 > 1$" afirman algo completamente distinto, expresan pensamientos completamente distintos; pero también "$2^4 = 4^2$" y "$4 \cdot 4 = 4^2$" expresan pensamientos distintos; y, a pesar de ello, se puede sustituir "2^4" por "$4 \cdot 4$", porque ambos signos tienen la misma referencia. En consecuencia, también "$2^4 = 4^2$" y "$4 \cdot 4 = 4^2$" se refieren a lo mismo. A partir de esto se comprende que la igualdad de referencia no tiene como consecuencia la igualdad de pensamiento. Cuando decimos "el lucero vespertino es un planeta cuya revolución es menor que la de la Tierra", hemos expresado un pensamiento distinto al del enunciado "el astro matutino es un planeta cuya revolución es menor que la de la Tierra"; pues quien no sepa que el lucero matutino es el lucero vespertino, podría suponer que uno es verdadero y el otro falso; y, con todo, la referencia de ambos enunciados debe ser la misma, puesto que sólo se han intercambiado las palabras "lucero vespertino" y "lucero matutino", que tienen ambas la misma referencia, es decir, son nombres propios del mismo cuerpo celeste. Hay que distinguir sentido y referencia. "2^4" y "$4 \cdot 4$" tienen ciertamente la misma referencia; es decir, son nombres propios del mismo número; pero no tienen el mismo sentido; y de ahí que tengan "$2^4 = 4^2$" y "$4 \cdot 4 = 4^2$" ciertamente la misma referencia, pero no el mismo sentido; es decir, en este caso no contienen el mismo pensamiento.[6]

Así, pues, con el mismo derecho con que escribimos

$$“2^4 = 4 \cdot 4”$$

podemos también escribir

$$“(2^4 = 4^2) = (4 \cdot 4 = 4^2)”$$

y

$$“(2^2 = 4) = (2 > 1)”$$

Siguiendo por este camino, podría preguntarse con qué fin se admitieron los signos $=$, $>$, $<$ en el círculo de los que contribuyen a formar una expresión funcional. Parece que en la actualidad gana cada vez más partidarios la opinión de que la aritmética es lógica extensamente desarrollada, que una fundamentación rigurosa de las leyes aritméticas nos retrotrae a leyes puramente lógicas y sólo a tales. También yo soy de esta opinión y en esto baso la exigencia de que el lenguaje simbólico aritmético debe ampliarse en uno lógico. Cómo ocurre esto en nuestro caso, lo indicaremos a continuación.

Vimos que el valor de nuestra función $x^2 = 1$ es siempre uno de los dos valores veritativos. Ahora bien,

6. No ignoro que este uso lingüístico puede parecer de momento arbitrario y artificial, y que se podría exigir una justificación más detenida. Consúltese mi artículo "Sobre sentido y referencia", *infra*, pp. 49-84.

si para un determinado argumento, por ejemplo -1, el valor de la función es lo verdadero, podemos expresar esto así: "el número -1 tiene la propiedad de que su cuadrado es 1", o más brevemente: "-1 es una raíz cuadrada de 1", o "-1 cae bajo el concepto de la raíz cuadrada de 1". Si el valor de la función $x^2 = 1$ es lo falso para un argumento, por ejemplo, 2, podremos entonces expresar esto así: "2 no es raíz cuadrada de 1" o bien "2 no cae bajo el concepto de raíz cuadrada de 1". Con esto vemos cuán estrechamente relacionado está lo que en lógica se llama concepto con lo que nosotros llamamos función. Incluso podrá decirse verdaderamente: un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor veritativo. También el valor de la función

$$(x+1)^2 = 2(x+1)$$

es siempre un valor veritativo. Obtenemos lo verdadero, por ejemplo, para el argumento -1 y podremos expresar esto también así: -1 es un número que es menor en 1 que un número cuyo cuadrado es igual a su duplo. Con esto, se ha expresado la ocurrencia del número -1 bajo un concepto. Las funciones

$$x^2 = 1 \text{ y } (x+1)^2 = 2(x+1)$$

tienen para el mismo argumento siempre el mismo valor, a saber, lo verdadero, para -1 y $+1$; lo falso, para todos los demás argumentos. Según lo establecido anteriormente, diremos, por tanto, que estas funciones tienen el mismo recorrido y lo expresaremos así en signos:

$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1) = \grave{\alpha}([\alpha + 1]^2 = 2\,[\alpha + 1]).$$

En Lógica se denomina a esta ecuación la extensión de los conceptos. Según esto, podemos designar como extensión del concepto el recorrido de una función, cuyo valor para cada argumento es un valor veritativo. No nos quedaremos en las ecuaciones e inecuaciones. La forma lingüística de las ecuaciones es un enunciado afirmativo. Un tal enunciado contiene como sentido un pensamiento — o, por lo menos, pretende contener alguno —; y este pensamiento es, en general, verdadero o falso; esto es, tiene, en general, un valor veritativo que puede concebirse asimismo como referencia del enunciado, así como el número 4 es la referencia de la expresión "$2 + 2$", o como Londres es la referencia de la expresión "la capital de Inglaterra".

Los enunciados afirmativos en general pueden concebirse, lo mismo que las ecuaciones o las expresiones analíticas, descompuestas en dos partes, una de las cuales está completa en sí misma, mientras que la otra precisa de complemento, es no-saturada. Así, por ejemplo, el enunciado

"César conquistó las Galias"

puede ser descompuesto en "César y "conquistó las Galias". La segunda parte es no-saturada, lleva consigo un lugar vacío, y únicamente cuando se llena este lugar por medio de un nombre propio o de una expresión que represente un nombre propio, aparecerá un sentido completo. También ahora llamo función al significado de esta parte no-saturada. En este caso, el argumento es César.

Como vemos, aquí se ha emprendido al mismo tiempo una extensión en la otra dirección, o sea, con respecto a lo que puede aparecer como argumento. Ya no hay que admitir tan sólo números, sino objetos en general, teniendo que contar también a las personas entre los objetos. Como valores de función posibles están los dos valores veritativos que acabamos de introducir. Hemos de seguir adelante y admitir objetos sin limitación como valores de función. Para tener un ejemplo de esto, consideremos, por ejemplo, la expresión

"la capital del Imperio alemán".

Esta expresión representa evidentemente un nombre propio y se refiere a un objeto. Si la descomponemos en las partes.

"la capital del"

e "Imperio alemán", con lo cual considero dentro de la primera parte la forma del genitivo, resulta que esta primera parte es no-saturada, mientras que la otra es completa en sí misma. Según lo antes dicho, llamo pues a

"la capital de x"

la expresión de una función. Si tomamos como argumento suyo el Imperio alemán, obtendremos, como valor de la función, Berlín.

Al haber admitido así objetos sin limitación como argumentos y como valores de función, lo que se pregunta entonces es a qué llamamos aquí objeto. Considero que es imposible una definición académica, puesto que en este caso tenemos algo que, por su simplicidad, no permite una descomposición lógica. Tan sólo es posible aludir a lo que se quiere decir. Brevemente, aquí

sólo se puede decir: objeto es todo lo que no es función, la expresión de lo cual, por tanto, no lleva consigo un lugar vacío.

Un enunciado afirmativo no contiene ningún lugar vacío, y por eso hay que considerar que su referencia es un objeto. Esta referencia, empero, es un valor veritativo. Por lo tanto, ambos valores veritativos son objetos.

Más arriba hemos presentado ecuaciones entre recorridos, por ejemplo

$$“\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2-4\,\varepsilon) = \acute{\alpha}(\alpha[\alpha-4])”.$$

Podemos descomponer esto en "$\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2-4\,\varepsilon)$" y "$(\ )=\acute{\alpha}(\alpha[\alpha-4])$".

Esta última parte es incompleta, al llevar consigo un lugar vacío a la izquierda del signo de igualdad. La primera parte, "$\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2-4\varepsilon)$", está totalmente completa en sí misma, o sea, que se refiere a un objeto. Los recorridos de las funciones son objetos, mientras que las funciones mismas no lo son. También habíamos denominado recorridos a $\acute{\varepsilon}\,(\varepsilon^2=1)$, pero también lo podríamos designar como extensión del concepto raíz cuadrada de 1. También las extensiones de conceptos son, pues, objetos, aunque los conceptos mismos no lo son.

Después de haber ampliado el círculo de lo que puede ser tomado como argumento, habrá que hacer estipulaciones más precisas sobre las referencias de los signos ya usuales. Hasta tanto se consideran como objetos únicamente los números enteros de la aritmética, las letras a y b de $a+b$ sólo aluden a números enteros, y sólo hay que explicar el signo "más" entre los números enteros. Cada ampliación del círculo de los objetos, a los que se alude con "a" y "b", hace precisa una nueva explicación del signo "más". Mandamiento del rigor científico es tomar precauciones para que una expresión no sea nunca carente de referencia, para que nunca se calcule, sin notarlo, con signos vacíos, en la opinión de que se trata de objetos. En época anterior se tuvieron experiencias desagradables con series infinitas divergentes. Es necesario, pues, hacer estipulaciones, de las cuales se desprenda, por ejemplo, a qué se refiere

$$\text{"}\odot + 1\text{"},$$

si "⊙" tiene que referirse al sol. El modo como se den estas estipulaciones es relativamente indiferente; lo esencial, empero, es que se hagan, que "$a + b$" tenga una referencia, sean cuáles sean los signos de objetos determinados que reemplacen a "a" y "b". Para los conceptos hacemos la exigencia de que, para cada argumento, tengan por valor un valor veritativo, de que, para cada objeto, quede determinado si cae bajo el concepto o no; con otras palabras: para los conceptos, hacemos la exigencia de que estén claramente delimitados; sin el cumplimiento de esta exigencia, sería imposible establecer leyes lógicas con ellos. Para cada argumento x, para el que "$x + 1$" no tuviera referencia, tampoco la función $x + 1 = 10$ tendría ningún valor, por lo tanto, tampoco ningún valor veritativo, de modo que el concepto

lo que aumentado en 1 da 10,

no tendría ningún límite claro. La exigencia de delimitación clara de los conceptos trae, pues, consigo la exigencia, válida para las funciones en general, de que deben tener un valor para cada argumento.

Hasta ahora hemos considerado los valores veritativos solamente como valores de función, no como argumentos. Según lo que acabamos de decir, una función debe tener también un valor para cada uno de los valores veritativos tomado como argumento; pero en la mayoría de los casos, si determinamos este valor será por ganas de determinarlo, sin que importe mucho cuál sea el valor determinado. Sin embargo, vamos a considerar algunas funciones, que nos interesa precisamente examinar en el caso en que su argumento es un valor veritativo. Como función semejante, introduzco

$$\text{——} x,$$

estipulando que el valor de esta función debe ser lo verdadero cuando se tome como argumento lo verdadero, mientras que en todos los demás casos el valor de esta función será lo falso; o sea, pues, lo mismo cuando el argumento es lo falso, como cuando no es ningún valor veritativo. Según esto, es, por ejemplo,

$$\text{——} 1 + 3 = 4$$

lo verdadero, mientras que tanto

$$\text{——} 1 + 3 = 5$$

como

$$\text{——} 4$$

son lo falso. El valor de esta función es, pues, el mismo argumento, cuando éste es un valor veritativo. En otra ocasión, había llamado a esta raya horizontal "raya de contenido", nombre que ahora ya no me parece adecuado. La llamaré ahora simplemente "la horizontal".

Cuando se escribe una ecuación o una inecuación, por ejemplo $5 > 4$, habitualmente con ello se quiere al mismo tiempo expresar un juicio; en este caso, se quiere afirmar que 5 es mayor que 4. Según la concepción que he expuesto aquí, con "$5 > 4$" o "$1 + 3 = 5$" se tienen solamente expresiones de valores veritativos, sin que con ellos quiera afirmarse nada. Esta separación entre el juzgar y aquello sobre lo cual se juzga parece ineludible, porque en caso contrario no sería expresable la mera suposición de un caso, el postular el mismo, sin hacer simultáneamente un juicio sobre su aparición. Precisamos, pues, de un signo particular para poder afirmar algo. Para ello, utilizo una raya vertical al extremo izquierdo de la horizontal, de modo que, por ejemplo, con

$$\text{“}\vdash\!\!\text{——}\ 2 + 3 = 5\text{”}$$

afirmamos: $2 + 3$ es igual a 5. O sea, que no sólo se le atribuirá un valor veritativo, como en el caso de

$$\text{“}2 + 3 = 5\text{”},$$

sino que al mismo tiempo se dice también que este valor veritativo es lo verdadero.[7]

La siguiente función sencilla puede ser aquella cuyo valor es lo falso justamente para los argumentos, para los cuales el valor de $\text{——}\, x$ es lo verdadero, y, recíprocamente, cuyo valor es lo verdadero para los argumentos, para los cuales el valor de $\text{——}\, x$ es lo falso.

7. La raya de juicio no puede ser utilizada para formar una expresión funcional, porque no puede contribuir, junto con otros signos, a la designación de un objeto. "$\vdash\!\!\text{——}\ 2 + 3 = 5$" no designa nada, sino que afirma algo.

La designo así

$$\top\, x,$$

y llamo a la pequeña raya vertical, raya de negación. Considero esta función como una función con el argumento $\text{——}\, x$:

$$(\top\, x) = (\top\, [\text{——}\, x]),$$

imaginando que las dos rayas horizontales se han fusionado. Pero también tenemos.

$$(\text{——}\, [\top\, x]) = (\top\, x),$$

porque el valor de $\top\ x$ es siempre un valor veritativo. Considero, pues, que en "$\top x$", las dos partes de la raya a la derecha y a la izquierda de la raya de negación son horizontales en el sentido de esta palabra que acabamos de explicar. A partir de todo esto,

$$\text{“}\top\, 2^2 = 5\text{”}$$

por ejemplo, se referirá a lo verdadero, y podemos añadir la raya de juicio:

$$\vdash\!\top\, 2^2 = 5,$$

con lo cual afirmamos que $2^2 = 5$ no es lo verdadero, o que 2^2 no es 5. Pero también

$$\top\, 2$$

es lo verdadero, porque $\text{——}\, 2$ es lo falso:

$$\vdash\!\top\, 2;$$

es decir, 2 no es lo verdadero.

El modo como represento la generalización se verá mejor con un ejemplo. Supongamos que hay que expresar que cada objeto es igual a sí mismo. En

$$x = x$$

tenemos una función, a cuyo argumento se alude por medio de "x". Hay que decir ahora que el valor de esta función es siempre lo verdadero, sea cual sea el argumento que se tome. Ahora bien, con

$$\text{“}-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-f(\mathfrak{a})\text{”}$$

me referiré a lo verdadero cuando la función $f(x)$ tenga como valor siempre lo verdadero, sea cual sea su argumento; en todos los demás casos,

$$\text{“}-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-f(\mathfrak{a})\text{”}$$

deberá referirse a lo falso. Para nuestra función $x = x$ se cumple el primer caso. Por lo tanto,

$$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

es lo verdadero; y esto lo escribimos así:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Las rayas horizontales a derecha e izquierda de la cavidad deben ser tomadas como horizontales en nuestro sentido. En vez de "$\mathfrak{a}$", podría escogerse cualquier otra letra alemana, a excepción de aquellas que, como $\mathfrak{f}$ y $\mathfrak{F}$, han de servir de letras de funciones.

Esta notación ofrece la posibilidad de negar la generalización, como en

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a}^2 = 1.$$

Pues $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a}^2 = 1$ es lo falso, ya que no para cada argumento, es el valor de la función $x^2 = 1$ lo verdadero. Pues, por ejemplo, para el argumento 2 obtenemos $2^2 = 1$; esto es lo falso. Ahora bien, si $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a}^2 = 1$ es lo falso, entonces es $\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a}^2 = 1$ lo verdadero, según lo que se ha estipulado antes sobre la raya de negación. Tenemos pues

$$\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a}^2 = 1;$$

es decir, "no todo objeto es raíz cuadrada de 1", o bien "hay objetos que no son raíz cuadrada de 1". ¿Puede expresarse también que hay raíces cuadradas de 1? ¡Sin duda! Basta con tomar, en vez de la función $x^2 = 1$, la función

$$\top x^2 = 1$$

De

$$\text{»}-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\top\,\mathfrak{a}^2 = 1\text{«}$$

resulta, por fusión de las horizontales,

$$\text{»}-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\,\mathfrak{a}^2 = 1\text{«}.$$

Esto significa lo falso, porque no para cada argumento es el valor de la función

$$\top x^2 = 1$$

lo verdadero. Por ejemplo,

$$\top 1^2 = 1$$

es lo falso, puesto que $1^2 = 1$ es lo verdadero. Así pues, dado que

$$-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

es lo falso, será por tanto

$$\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

lo verdadero:

$$\vdash\!\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}^2 = 1;$$

es decir, "no para cada argumento es el valor de la función

$$\top\ x^2 = 1$$

lo verdadero", o bien "no para cada argumento es el valor de la función $x^2 = 1$ lo falso", o bien "hay por lo menos una raíz cuadrada de 1".

A continuación daremos todavía algunos ejemplos en signos y palabras:

$$\vdash\!\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a} \geq 0,$$

hay por lo menos un número positivo;

$$\vdash\!\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a} < 0,$$

hay por lo menos un número negativo;

$$\vdash\!\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}^3 - 3\,\mathfrak{a}^2 + 2\,\mathfrak{a} = 0,$$

hay por lo menos una raíz de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

A partir de aquí puede comprenderse cómo pueden expresarse las proposiciones existenciales más importantes. Si aludimos indeterminadamente a un concepto por medio de la letra de funciones f, tendremos en

$$\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ f(\mathfrak{a})$$

la forma en la que están contenidos los últimos ejemplos, prescindiendo de la raya de juicio. Las expresiones

$$\text{“}\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}=1\text{”},\quad \text{“}\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}\geq 0\text{”},\quad \text{“}\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}<0\text{”},$$
$$\text{“}\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}^3 - 3\,\mathfrak{a}^2 + 2\,\mathfrak{a} = 0\text{”}$$

surgen de esta forma de manera parecida a como, por ejemplo, de x^2 surgen "1^2", "2^2", "3^3". Así como con x^2 tenemos una función, a cuyo argumento se alude por medio de "x", así también considero que

$$\text{“}\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ f(\mathfrak{a})\text{”}$$

es expresión de una función, a cuyo argumento se alude por medio de "f". Una tal función es, evidentemente, fundamentalmente distinta de las hasta ahora consideradas, pues, como argumento suyo sólo puede entrar una función. Así como las funciones son fundamentalmente distintas de los objetos, así también aquellas funciones cuyos argumentos son y deben ser funciones son fundamentalmente distintas de las funciones cuyos argumentos son objetos y no pueden ser otra cosa. A estas últimas las llamo funciones de primer orden; a las otras las llamo funciones de segundo orden. Igualmente distingo conceptos de primero y segundo orden.[8] De hecho, hace ya tiempo que en el análisis se tenían funciones de segundo grado, por ejemplo, las integrales definidas, en la medida en que se considere la función a ser integrada como argumento.

Puede añadirse todavía algo sobre funciones con dos argumentos. Obtuvimos la expresión de una función al desmembrar el signo compuesto de un objeto en una parte saturada y otra no-saturada. Así descompusimos, por ejemplo, el signo

$$“3 > 2”$$

de lo verdadero en “3” y “$x > 2$”. Podemos seguir descomponiendo la parte no-saturada “$x > 2$” del mismo modo en “2” y

$$“x > y”,$$

donde ahora “y” indica el lugar vacío, que antes había sido llenado por “2”. Con

$$x > y$$

tenemos una función con dos argumentos, a uno de los cuales se alude por medio de “x”, al otro por medio de “y”, y con

$$3 > 2$$

tenemos el valor de esa función para los argumentos 3 y 2. Tenemos aquí una función cuyo valor es siempre

8. V. mis *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, al final del § 53. La prueba ontológica de la existencia de Dios adolece del error de que trata la existencia como un concepto de primer grado.

un valor veritativo. A las funciones de este tipo con un argumento las hemos llamado conceptos; a las que tienen dos argumentos las llamamos relaciones. También tenemos relaciones en el caso de

$$x^2 + y^2 = 9$$

y de

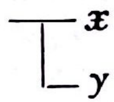
$$x^2 + y^2 > 9,$$

mientras que la función

$$x^2 + y^2$$

tiene números por valores. Por lo tanto, no la llamaremos relación.

Vamos a considerar ahora una función que no es peculiar de la aritmética. Sea la función



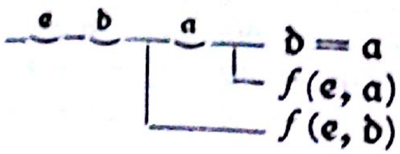
cuyo valor es lo falso, cuando se toma lo verdadero como argumento-y y al mismo tiempo un objeto como argumento-x, objeto que no sea lo verdadero; en todos los demás casos, el valor de esta función será lo verdadero. La raya horizontal inferior y las dos partes en que queda dividida la superior por la raya vertical deben considerarse horizontales. En consecuencia, siempre pueden tomarse como argumentos de nuestra función —— x y ——y, es decir, valores veritativos.

Entre las funciones de un argumento, distinguimos las de primero y segundo grado. En este caso es posible una mayor variedad. Una función con dos argumentos puede ser, con relación a éstos, del mismo o de distinto grado: funciones de grado igual o de grado desigual. Las que hemos considerado hasta aquí eran de grado igual. Una función de grado desigual es, por ejemplo, el cociente diferencial, cuando se toman como argumentos la función que hay que diferenciar y el argumento para el cual aquélla es diferenciada, o bien la integral definida, siempre que se tomen como argumentos la función que hay que integrar y el límite superior. Las funciones de grado igual pueden dividirse, a su vez, en funciones de primero y segundo grado. Una tal función de segundo grado es, por ejemplo,

$$f(g[1])$$

en que f y g indican los argumentos.

En las funciones de segundo grado con un argumento hay que distinguir según que en este argumento aparezca una función con uno o con dos argumentos, pues una función con un argumento es tan radicalmente distinta de una función con dos argumentos, que la una no puede aparecer precisamente en el mismo lugar en que puede aparecer la otra. Algunas funciones de segundo grado con un argumento piden, como tal argumento, una función con un argumento, mientras que otras piden una función con dos argumentos, y estas dos clases están tajantemente diferenciadas.



es un ejemplo de una función de segundo grado con un argumento, el cual pide como tal una función con

dos argumentos. La letra f alude aquí al argumento, y los dos lugares separados por la coma, en los paréntesis que siguen a "f", ponen de manifiesto que f representa una función con dos argumentos.

En el caso de las funciones con dos argumentos, la variedad es aún mayor.

Si, a partir de todo esto, echamos un vistazo retrospectivo al desarrollo de la aritmética, nos damos cuenta de su progreso gradual. Primero se calculaba con números singulares, con el 1, el 3, etc.

$$2+3=5, \quad 2\cdot 3=6$$

son teoremas de esta clase. Se pasó luego a leyes más generales, que valen para todos los números. En la notación, esto corresponde al paso al álgebra. En

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

tenemos un teorema de este tipo. Con ello se había llegado ya a la consideración de funciones singulares, sin utilizar todavía la palabra en el sentido matemático, ni haber comprendido su significado. El peldaño inmediatamente superior fue el conocimiento de leyes generales para las funciones y, con esto, el acuñamiento de la expresión artificial "función". En la notación, a esto corresponde la introducción de letras como f y F, para aludir indeterminadamente a las funciones. En

$$\frac{df(x)\cdot F(x)}{dx} = F(x)\cdot\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dF(x)}{dx}$$

tenemos un teorema de esta clase. De este modo se tenían también funciones singulares de segundo grado, sin que, a pesar de ello, se concibiera lo que hemos denominado función de segundo grado. Podría pensarse que se proseguirá en esta dirección. Pero, probablemente, este último paso no tiene ya tantas consecuencias como los anteriores, puesto que, con el progreso ulterior, las funciones de segundo grado podrán ser consideradas de primer grado, como se demostrará en otro lugar.* Pero con ello no se habrá eliminado totalmente la diferencia entre funciones de primero y segundo grado, porque esta diferencia no fue hecha arbitrariamente, sino que tiene una justificación profunda en la naturaleza de la cuestión.

También pueden considerarse, en vez de funciones con dos argumentos, funciones de un único argumento, aunque complejo, con lo cual, sin embargo, subsiste con toda claridad la diferencia entre funciones con uno y con dos argumentos.

* *N. del T.*: Cf. *Grundgesetze der Arithmetik* ("Las leyes fundamentales de la aritmética"), §§ 25, 34-37.